Analyse combinatoire

1

Nous allons développer dans ce chapitre des techniques de dénombrements qui permettront de résoudre des problèmes du genre:

- combien existe-t-il de mains différentes de cinq cartes au poker? (rép: 2 598 960)
- combien existe-t-il de combinaisons différentes au 6/49 ? (rép: 13 983 816)
- combien existe-t-il de façons différentes de répondre au hasard à un examen de 10 questions du type VRAI ou FAUX ? (rép: 1024)

1.1 Principe de multiplication et principe d'addition

problème 1.1.1

On dispose de k cases distinctes et l'on désire placer un objet dans chacune des cases. Le choix du

1^{er} objet se fait parmi les objets d'un ensemble A_1,
2^e objet se fait parmi les objets d'un ensemble A_2,
3^e objet se fait parmi les objets d'un ensemble A_3,

.
.
.

k^e objet se fait parmi les objets d'un ensemble A_k.

De combien de façons différentes peut-on le faire?

On peut résoudre ce problème en utilisant une des méthodes suivantes.

- La méthode d'énumération (arbre d'étalement)
- La méthode de dénombrement (principe de multiplication)

La méthode d'énumération (arbre d'étalement)

exemple 1.1.1

On dispose de 2 cases et on désire placer un objet dans chaque case. Si $A_1 = \{ 1, 2 \}$ et $A_2 = \{ A, B, C \}$, de combien de façons différentes peut-on le faire ?

rép: 6

exemple 1.1.2

On dispose de 3 cases et on désire placer un objet dans chaque case. Si $A_1 = A_2 = A_3 =\{ P, F \}$, de combien de façons différentes peut-on le faire ?

rép: 8

La méthode d'énumération devient rapidement impossible à appliquer lorsque le nombre d'objets augmente. Il est néanmoins possible d'obtenir un tel dénombrement sans énumération. En se référant aux deux exemples précédents, on acceptera sans peine le *principe de multiplication*.

La méthode de dénombrement (principe de multiplication)

principe de multiplication

Soit un ensemble A_1 constitué de $n(A_1)$ objets distincts et un ensemble A_2 constitué de $n(A_2)$ objets distincts. Le nombre de façons différentes de placer un objet de A_1 dans une première case et un objet de A_2 dans une seconde case est donné par

$$n(A_1) \times n(A_2)$$

Le principe de multiplication se généralise à plusieurs cases et la solution du problème de la page précédente sera

$$n(A_1) \times n(A_2) \times n(A_3) \times \ldots \times n(A_k)$$

Ce problème général posé et solutionné constitue un modèle mathématique. Tout problème pouvant être présenté sous une forme équivalente pourra être solutionné en utilisant le principe de multiplication.

exemple 1.1.3

On lance un sou 4 fois. Combien peut-on obtenir de résultats différents ?

rép: 16

exemple 1.1.4

Un restaurant affiche le menu suivant:

POTAGE	ENTRÉE	PLAT PRINCIPAL	DESSERT
Tomate	*Crevette*	*Canard*	*Gâteau*
Légume	*Salade*	*Bœuf*	*Fruit*
		Truite	

Combien existe-t-il de choix différents de repas complets?

rép: 24

exemple 1.1.5

Combien peut-on former de plaques d’immatriculation différentes constituées de

a) quatre chiffres?
b) quatre chiffres ou moins?

rép: a) 10 000 ; b) 11 110

principe d’addition

Si E , A et B sont trois ensembles tels que

$$E = A \cup B \quad \text{et} \quad A \cap B = \varnothing$$

alors

$$n(E) = n(A) + n(B)$$

Le principe de multiplication se généralise à plusieurs ensembles

Certains problèmes présentent des contraintes.

exemple 1.1.6

Avec les lettres A, B, C, D, E et F combien de mots différents de 5 lettres peut-on former

a) au total?
b) si les répétitions des lettres ne sont pas permises?
c) si les répétitions des lettres ne sont pas permises et le mot commence par une consonne?
d) si les répétitions des lettres ne sont pas permises et le mot se termine par deux voyelles ou deux consonnes?

rép: a) 7776 ; b) 720 ; c) 480 ; d) 336

D'autres problèmes ne pourront être résolus en utilisant le principe de multiplication. Dans certains cas, l'utilisation d'un arbre d'étalement permettra de solutionner ces problèmes.

exemple 1.1.7

Combien de nombres de 3 chiffres supérieurs à 546 peut-on former avec les chiffres 2, 4, 5, 7 si les répétitions ne sont pas permises?

pourquoi ne peut-on pas résoudre ce problème à l'aide du principe de multiplication?

rép: 9

Exercices 1.1

1. Une compagnie d'assurance classifie ses assurés selon le sexe (2), l'état civil (3) et le type de risque (10). De combien de catégories différentes cette compagnie dispose-t-elle ?

2) La Compagnie de cidre Cidrobec veut identifier ses produits. Pour cela, elle émet certaines caractéristiques les concernant:
   - selon le degré de CO_2, le cidre est qualifié de mousseux, pétillant ou non effervescent,
   - selon le degré de sucre, il est qualifié de doux, semi-doux ou sec,
   - selon le degré d'alcool, il est considéré comme léger ou fort.

   Combien de produits différents, cette compagnie peut-elle produire?

3. Un manufacturier fabrique 5 modèles de souliers en 10 pointures et 3 couleurs. Combien de différentes sortes de paires de souliers fabrique-t-il?

4. On lance simultanément une pièce de monnaie et un dé. Combien y a-t-il de résultats possibles?

5. On lance un dé plusieurs fois en prenant note du résultat à chaque épreuve. Combien y a-t-il de résultats possibles si on lance le dé

   a) 2 fois? b) n fois?

6. Un couple désire avoir 3 enfants. De combien de façons différentes la famille peut-elle se composer? (ex.: FFG, GFF, ...)

7. Un questionnaire objectif comporte 10 questions. À chaque question, on peut répondre par VRAI ou FAUX. Combien y a-t-il de façons de répondre au questionnaire complet?

8. Un coffre-fort possède 3 roulettes numérotées de 1 à 25. Un voleur tente d'ouvrir le coffre-fort et il ne connaît pas la combinaison.

   a) Combien existe-t-il de possibilités de combinaisons?
   b) De combien de façons peut-il se tromper?

9. Trois routes relient A et B et quatre routes relient B et C. De combien de façons peut-on aller de A à C en passant par B?

10. On sait qu'un code postal est formé de 3 lettres et de 3 chiffres. Sachant que seulement 20 lettres sont permises, combien peut-on retrouver de codes postaux différents?

11. De combien de façons peut-on peindre les 4 murs d'une chambre si on dispose de 6 couleurs?

12. Douze coureurs prennent part à une course. De combien de façons peut-on attribuer le premier, le deuxième et le troisième prix?

13. De combien de façons différentes peuvent s'établir
    a) les 3 premières places d'une course de 8 chevaux?
    b) les 3 premières places d'une course de 10 chevaux?
    c) les 4 premières places d'une course de 10 chevaux?

14. Messieurs X, Y et Z arrivent dans une ville où il y a 4 hôtels: H_1, H_2, H_3, H_4. Chacun choisit un hôtel au hasard. De combien de façons différentes ces voyageurs peuvent-ils
    a) se répartir?
    b) se répartir dans des hôtels différents?

15. De combien de façons différentes peuvent se répartir:
    a) 4 voyageurs dans 5 hôtels?
    b) 6 voyageurs dans 3 hôtels?

16. Trois athlètes participent à cinq compétitions sportives. De combien de façons différentes, les cinq compétitions peuvent-elles être gagnées?

17. Entre les villes A et B, il y a cinq routes, tandis qu'entre les villes B et C, il y a quatre routes. De combien de façons différentes, une personnes peut-elle voyager entre A et C aller-retour, sans passer par la même route 2 fois?

18. Combien y a-t-il de mots de 4 lettres qui commencent:
    a) par 2 voyelles? (les autres lettres sont quelconques)
    b) par 2 voyelles ou par 2 consonnes?

19. Dans le code Morse, un message est représenté par une suite de points et/ou de tirets. Combien de messages distincts peut-on former avec une suite de
    a) 4 symboles?
    b) d'au plus 4 symboles?

20. Combien de nombres composés de trois chiffres et inférieurs à 500 peut-on former à l'aide des chiffres 1,2,3,4,5,6 et 7 si les répétitions:
    a) sont permises?
    b) ne sont pas permises?

21. Combien peut-on former de mots de 7 lettres avec les lettres du mot PLAFOND
    a) si une même lettre ne peut être employée qu'une seule fois?
    b) si on tolère les répétitions d'une même lettre?

22. Combien de nombres de 6 chiffres peut-on former à partir des chiffres 0, 1, 3, 5, 6 et 7? (les répétitions sont permises)

23. Combien de nombres supérieurs à 30 000 peut-on former avec les chiffres 0, 2, 3, 4 et 5 si ces nombres doivent être composés de chiffres différents?

24. Avec les lettres du mot MINÉRAUX, combien peut-on former de mots différents (répétitions non permises)
    a) de 8 lettres?
    b) de 8 lettres commençant et se terminant par une consonne?

25. De combien de façons 6 enfants peuvent-ils s'asseoir sur une rangée de 6 chaises si 3 d'entre eux refusent d'occuper les extrémités de la rangée?

26. De combien de façons 6 personnes peuvent-elles s'asseoir dans une voiture à 6 sièges si seulement 2 d'entre elles savent conduire?

27. De combien de façons différentes peut-on former la suite ordonnée VALET, DAME, ROI, AS si l'on veut que les cartes de cette suite soient
    a) de couleurs différentes?
    b) de la même couleur?
    c) de n'importe quelle couleur?

(aux cartes les couleurs sont: coeur, carreau, trèfle et pique)

28. Combien de mots de 5 lettres au plus et de 2 lettres au moins peut-on former avec les lettres du mot HYDROFUGES, tous les mots devant se terminer par la lettre E sans répétition?

29. Avec les lettres du mot TRIANGLE, combien de mots de 8 lettres peut-on former (sans répétition) commençant par une consonne, se terminant par une voyelle, la lettre R devant être une des 3 premières lettres?

30. Six personnes A, B, C, D, E et F se placent en ligne au hasard. Combien d'alignements
    a) peut-il y avoir?
    b) ont B placé directement en arrière de A?
    c) ont A et B placés côte à côte?

31. Un voyageur se tient à l'origine sur l'axe des x. Il avance d'une unité à la fois soit à gauche, soit à droite. Il arrête lorsqu'il a atteint 3 ou -3, ou s'il revient à une position déjà occupée (exception faite du 0). Dessiner un arbre pour calculer le nombre de parcours différents possibles de ce voyageur.

32. Un homme veut jouer à la roulette au plus cinq fois. À chaque jeu, il perd l $ ou il gagne 1 $. S'il possède l $ au départ et s'il décide d'arrêter de jouer s'il a tout perdu ou s'il a gagné 3 $ (il a alors 4 $). Dessiner un arbre pour obtenir le nombre de possibilités qu'a cet homme.

Réponses aux exercices 1.1

1.		60	
2.		18	
3.		150	
4.		12	
5.	a)	36 b)	6^n
6.		8	
7.		1024	
8.	a)	15 625	b) 15 624
9.		12	
10.		8 000 000	
11.		1296	
12.		1320	
13.		336 , 720 , 5040	
14.	a)	64 b)	24
15.	a)	625	b) 729
16.		243	
17.		240	
18.	a)	24 336	b) 294 736
19.		16 , 30	
20.	a)	196	b) 120
21.	a)	5040	b) 823 543
22.		38 880	
23.		72	
24.	a)	40 320	b) 8640
25.		144	

26.		240	
27.	a)	24 b)	4 c) 256
28.		3609	
29.		5040	
30.		720 , 120 , 240	
31.		14	
32.		11	

1.2 Notation factorielle

définition 1.2.1

Soit n un entier positif. Le produit de tous les entiers positifs de 1 à n est appelé *factorielle n* et est noté $n!$

$$\begin{aligned} n! &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ \ldots \ \times (n - 1) \times n \\ &= n \times (n - 1)! \end{aligned}$$

De plus, $\quad 0! = 1$

exemple 1.2.1

Évaluer si possible.

a) $3!$ c) $(-2)!$ e) $(1/2)!$ g) $\dfrac{8!}{6!\,0!}$

b) $5!$ d) $-2!$ f) $(3!)^2$ h) $\dfrac{8! + 7!}{7! - 4(6!)}$

rép: a) 6 ; b) 120 ; c) impossible ; d) -2
e) impossible ; f) 36 ; g) 56 ; h) 21

exemple 1.2.2

Écrire chacune des expressions suivantes sous la forme d'une simple factorielle.

a) $(n + 2)(n + 1)!$ b) $\dfrac{(n - r)!}{(n - r)(n - r - 1)}$

rép: a) $(n + 2)!$; b) $(n - r - 2)!$

exemple 1.2.3

Évaluer si possible.

a) $\dfrac{n!}{(n - 1)!}$ b) $\dfrac{(n - 1)!}{(n - 3)!}$ c) $\dfrac{n! + (n + 1)!}{(n - 1)! + n!}$

rép: a) n ; b) $(n - 1)(n - 2)$; c) $\dfrac{n(n + 2)}{(n + 1)}$

exemple 1.2.4

Résoudre l'équation suivante.

$$n! = 6(n - 2)!$$

rép: $n = 3$

Exercices 1.2

1. Évaluer

a) $\dfrac{52!}{50!}$

b) $\dfrac{8!}{5!\,3!}$

c) $\dfrac{7!}{5!\,2!} + \dfrac{7!}{4!\,3!}$

d) $\dfrac{4! + 5!}{5!}$

e) $\dfrac{5! + 3!}{5! - 3!}$

f) $\dfrac{4!\,6!}{9! - 8!}$

g) $\dfrac{5! - 4(4!)}{4(5!) - 4!}$

2. Écrire chacune des expressions suivantes sous la forme d'une simple expression factorielle.

a) $(n + 1)n!$

b) $\dfrac{(n + 7)!}{(n + 7)}$

c) $(n - r + 1)(n - r)!$

d) $\dfrac{(n!)^2}{n(n - 1)(n -2)!}$

e) $\dfrac{(n - r + 1)!}{(n - r + 1)(n - r)(n - r - 1)}$

3. Simplifier

a) $\dfrac{(n + 5)!}{(n + 3)!}$

b) $\dfrac{(n + 1)!}{n!}$

c) $\dfrac{(n - 2)!}{(n - 1)!}$

d) $\dfrac{(n!)^2}{(n - 2)!(n + 1)!}$

e) $\dfrac{(n - 1)! - n!}{n! + (n - 1)!}$

f) $\dfrac{n! - (n - 1)(n - 1)!}{(n - 1)n! - (n - 1)!}$

4. Montrer que

a) $\dfrac{[(2n)!]^2}{(2n - 1)!(2n + 1)!} = \dfrac{2n}{2n + 1}$

b) $\dfrac{(n + 1)!}{n!} - \dfrac{(n - 1)!}{(n - 2)!} = 2$

c) $\dfrac{r(n - 1)!}{(n - r)!} + \dfrac{(n - 1)!}{(n - r - 1)!} = \dfrac{n!}{(n - r)!}$

5. Résoudre les équations suivantes.

a) $\dfrac{n!}{(n-4)!} = \dfrac{20n!}{(n-2)!}$

b) $n! = (n-2)!$

c) $n! = 12\sqrt{n! - 20}$

d) $n! - 7 + \dfrac{6}{n!} = 0$

Réponses aux exercices 1.2

1. a) 2652 b) 56 c) 56 d) $\frac{6}{5}$ e) $\frac{21}{19}$ f) $\frac{3}{56}$ g) $\frac{1}{19}$

2. a) $(n + 1)!$ b) $(n + 6)!$ c) $(n - r + 1)!$ d) $n!$ e) $(n - r - 2)!$

3. a) $(n + 5)(n + 4)$ b) $(n + 1)$ c) $\frac{1}{(n - 1)}$ d) $\frac{n(n - 1)}{(n + 1)}$ e) $\frac{(1 - n)}{(n + 1)}$ f) $\frac{1}{n^2 - n - 1}$

4.

5. a) $n = 7$ b) aucune valeur de n c) $n = 4$, $n = 5$ d) $n = 3$, $n = 1$, $n = 0$

1.3 Permutations, combinaisons et arrangements d'objets distincts

Une catégorie importante de problèmes en analyse combinatoire se ramènent au cas suivant.

Problème 1.3.1

On dispose de n objets distincts. Combien existe-t-il de façons différentes

a) d'agencer (ordonner) les objets?
(nombre de PERMUTATIONS de n objets)

b) de choisir r de ces objets?
(nombre de COMBINAISONS de r objets parmi n)

c) de choisir r de ces objets et de les agencer (ordonner)?
(nombre d'ARRANGEMENTS de r objets parmi n)

Il est possible d'obtenir la solution de chacun de ces problèmes en utilisant le principe de multiplication.

1.3.1 Permutations d'objets distincts

exemple 1.3.1

Déterminer de combien de façons différentes on peut agencer (ordonner) les objets distincts A, B et C.

rép: 6

Chaque agencement s'appelle une *permutation*.

proposition 1.3.1

Le nombre de permutations différentes de n objets distincts est

$$n!$$

exemple 1.3.2

Avec les lettres du mot PARENT, combien de mots différents de 6 lettres peut-on former?

rép: 720

Certains problèmes présentent des contraintes.

exemple 1.3.3

De combien de façons différentes, 3 hommes et 2 femmes peuvent-ils occuper les 5 sièges d'une rangée

a) au total?
b) si 2 hommes doivent occuper les extrémités de la rangée?
c) si les hommes et les femmes doivent alterner?
d) si les 2 femmes doivent être voisines?
e) si les 2 femmes ne doivent jamais être voisines?

rép: a) 120 ; b) 36 ; c) 12 ; d) 48 ; e) 72

exemple 1.3.4

Avec les lettres du mot CONSEIL, combien de mots différents de 7 lettres peut-on former

a) au total?
b) si les voyelles doivent être ensemble?
c) si les voyelles doivent être ensemble de même que les consonnes?
d) si les lettres C et S ne doivent jamais être voisines?
e) si le C doit être à la première ou à la seconde position du mot?

rép: a) 5040 ; b) 720 ; c) 288 ; d) 3600 ; e) 1440

Exercices 1.3.1

1. Cinq drogues ont été administrées dans le but d'apporter un traitement à une maladie. Une expérience est effectuée pour tester l’hypothèse que l'ordre d'administration de ces drogues est important. Combien y a-t-il de façons différentes d'administrer ces 5 drogues?

2. De combien de façons différentes peut-on assigner 6 personnes dont Pierre, à 6 tâches si Pierre doit effectuer la première ou la deuxième tâche?

3. Avec le mot RELATION, combien peut-on former de mots
   a) au total?
   b) si les 4 consonnes sont inséparables et toujours dans le même ordre?
   c) si les 4 consonnes sont inséparables mais dans un ordre quelconque?
   d) si les voyelles et les consonnes alternent?
   e) si les voyelles sont inséparables et toujours dans le même ordre tandis que les consonnes sont inséparables mais dans un ordre quelconque?

4. On veut placer 6 livres dans un rayon de bibliothèque. De combien de façons différentes peut-on le faire sachant
   a) que 3 d'entre eux sont des volumes qui doivent rester ensemble dans le même ordre?
   b) que 2 volumes donnés ne doivent jamais être voisins?
   c) que l'on a 2 TINTIN, 2 ASTERIX ainsi que 2 LUCKY LUKE et que les livres d'une même collection doivent rester ensemble?

   (Considérer que les volumes à la bibliothèque sont ordonnés)

5. De combien de façons différentes peut-on peinturer 7 cercles concentriques à l'aide des couleurs suivantes: BLANC, NOIR, ROUGE, JAUNE, BLEU, VERT, BRUN
   a) si NOIR et BLANC doivent peinturer des cercles voisins mais NOIR doit peinturer un cercle plus grand que BLANC?
   b) si NOIR et BLANC ne doivent jamais être placés côte à côte?

   (Toutes les couleurs doivent être utilisées)

6. Cinq couples achètent des billets de saison de football au Stade Olympique. Ils obtiennent les 10 bancs de la rangée H de la section 740. De combien de façons différentes peuvent-ils occuper la rangée
   a) s'ils se connaissent tous et peuvent occuper n'importe quel siège?
   b) s'ils désirent rester en couples?
   c) si les hommes et les femmes alternent?
   d) si les femmes sont assises ensemble?
   e) si les hommes sont assis ensemble de même que les femmes?

7. On demande au jeune ténor napolitain Paolo Varoti, d'interpréter 8 chansons à une soirée bénéfice. Il choisit d'interpréter 2 oeuvres d'Eduardo Di Capua, 2 oeuvres d'Ernesto De Cartis, 2 oeuvres de Francesco Tosti, 2 oeuvres de Luigi Denza. De combien de façons différentes peut-il le faire s'il désire
   a) commencer par une oeuvre de Di Capua et finir par une oeuvre de Denza?
   b) interpréter consécutivement les 2 oeuvres de chaque compositeur?
   c) que les 4 premières chansons soient de compositeurs différents?

Réponses aux exercices 1.3.1

1. 120

2. 240

3. a) 40 320
   b) 120
   c) 2880
   d) 1152
   e) 48

4. a) 24
   b) 480
   c) 48

5. a) 720
   b) 3600

6. a) 3 628 800
   b) 3840
   c) 28 800
   d) 86 400
   e) 28 800

7. a) 2880
   b) 384
   c) 9216

1.3.2 Combinaisons et arrangements d'objets distincts

exemple 1.3.5

Combien existe-t-il de façons différentes de

a) *choisir* 3 objets parmi les 5 objets distincts A, B, C, D et E?
b) *choisir et agencer* 3 objets parmi les 5 objets distincts A, B, C, D et E?

rép: a) 10 ; b) 60

Chaque façon de choisir s'appelle *une combinaison* et chaque façon de choisir et d'agencer s'appelle *un arrangement*.

D'une façon générale,

combinaison

Le nombre de façons différentes de choisir r objets parmi n objets distincts (nombre de combinaisons) noté C_r^n est donné par la formule

$$C_r^n = \frac{n!}{(n - r)!\, r!}$$

arrangement

Le nombre de façons différentes de choisir et d'agencer r objets parmi n objets distincts (nombre d'arrangements) noté A_r^n est donné par la formule

$$A_r^n = \frac{n!}{(n - r)!}$$

propriétés des combinaisons

1. $C^n_0 = C^n_n = 1$

2. $C^n_1 = C^n_{n-1} = n$

3. $C^n_r = C^n_{n-r}$

On pourrait démontrer que
$C^n_r = C^n_x \Leftrightarrow x = r$ ou $x = n - r$

exemple 1.3.6

Trouver n si $C^n_7 = C^n_4$

rép: n = 11

exemple 1.3.7

Trouver r si $C^{15}_r = C^{15}_{r+3}$

rép: r = 6

exemple 1.3.8

À un examen on demande de répondre à seulement 6 questions sur 10. Combien y a-t-il de choix différents possibles?

rép: 210

exemple 1.3.9

Combien existe-t-il de mains différentes de 5 cartes au poker?

(On dispose d'un jeu ordinaire de 52 cartes)

rép: 2 598 960

exemple 1.3.10

Combien existe-t-il de combinaisons différentes à la lotto 6/49?
(À cette loterie, il faut choisir 6 nombres parmi 1, 2, 3, … 49)

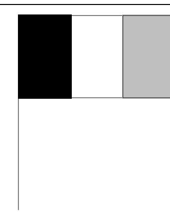
rép: 13 983 816

exemple 1.3.11

Avec les 5 couleurs suivantes:

ROUGE, JAUNE, BLEU, VERT et NOIR

combien peut-on colorer de drapeaux différents de la forme ci-contre en utilisant 3 des couleurs?



rép: 60

exemple 1.3.12

Nous avons à former un comité de 3 personnes choisies parmi 8 candidats possibles.

a) Combien de comités différents peut-on former?
b) Si le comité possède 1 président, 1 vice-président et 1 secrétaire alors combien de comités peut-on former?

rép: a) 56 ; b) 336

exemple 1.3.13

Combien de comités différents comprenant 1 professeur et 2 étudiants peut-on former avec 2 professeurs et 4 étudiants?

rép: 12

exemple 1.3.14

De 7 Anglais et 4 Français, on veut former un comité de 6 personnes. De combien de façons différentes peut-on le former

a) au total?
b) si 2 Français doivent en faire partie?
c) si au moins un Français doit en faire partie?

rép: a) 462 ; b) 210 ; c) 455

exemple 1.3.15

Avec les lettres du mot RELATIONS, combien peut-on former de mots différents de 5 lettres?

a) au total?
b) contenant 3 consonnes et 2 voyelles?
c) contenant 3 consonnes et 2 voyelles se terminant par R et ne contenant pas de E?

rép: a) 15 120 ; b) 7200 ; c) 432

exemple 1.3.16

À partir d'un jeu ordinaire de 52 cartes, on compose une main de 3 cartes. Combien existe-t-il de façons différentes de composer

a) 3 as?
b) 3 coeurs?
c) un triplet?
d) 3 cartes d'une même couleur?
e) une paire?
f) 3 couleurs différentes?

rép: a) 4 ; b) 286 ; c) 52 ; d) 1144 ; e) 3744 ; f) 8788

exemple 1.3.17

De combien de façons différentes peut-on aligner 4 hommes et 3 femmes si les 3 femmes doivent être séparées?

rép: 1440

Exercices 1.3.2

1. Calculer

   a) A_2^8 c) A_7^7

   b) A_5^6 d) A_3^7

2. Calculer

   a) C_4^7 c) C_7^8

   b) C_3^7 d) C_{18}^{18}

3. Simplifier l'expression $\dfrac{A_5^n}{C_4^{n-1}}$

4. Trouver x

   a) si $C_{12}^x = C_8^x$ b) si $C_x^{18} = C_{x-2}^{18}$

5. Trouver n

   a) si $C_2^n = 15$ b) si $C_7^n = 2C_6^n$

6. Un groupe de 20 personnes doit élire un comité de 4 personnes, choisies parmi tous les membres du groupe. De combien de façons peut-on faire ce choix?

7. Un examen comprend 10 questions parmi lesquelles on doit en choisir 7. Combien a-t-on de choix de réponses possibles?

8. Combien de sous-ensembles de 3 éléments possède l'ensemble

   $$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$$

9. Combien y a-t-il de mains différentes de 13 cartes au bridge?

   (Les cartes proviennent d'un jeu de 52 cartes)

10. On trace 6 points sur la circonférence d'un cercle. Combien peut-on tracer de sécantes si chacune passe par 2 de ces points?

11. Un contremaître a 4 différentes tâches à accomplir, pour chacune desquelles il lui faut un ouvrier. S'il dispose de 12 ouvriers, de combien de façons peut-il confier les 4 tâches?

12. Combien de mots différents de 3 lettres peut-on former à partir des lettres du mot TARDIVE?

13. Trois personnes entrent dans une salle d'attente où 5 sièges sont libres. De combien de façons peuvent-elles s'asseoir?

14. Une hélice porte 3 banderoles différentes qui donnent quand l’hélice tourne rapidement l’illusion de 3 cercles concentriques. Si l'on dispose de 10 couleurs différentes, combien d'effets différents peut-on obtenir?

15. Tes 2 frères et toi êtes membres d’une organisation qui compte 25 membres en règle. Dans cette organisation le choix du président, du vice-président, du secrétaire et du trésorier est un choix s'effectuant au hasard.
    a) De combien de façons différentes peut-on choisir l’exécutif?
    b) Combien y a-t-il de ces exécutifs qui ne contiennent personne de ta famille?

16. Dix voyageurs entrent dans une salle d'attente où 5 sièges sont libres.
    a) De combien de façons ces sièges peuvent-ils être tous occupés?
    b) De combien de façons peuvent-ils être occupés si 2 des voyageurs sont des personnes âgées qui ne peuvent rester debout?

17. Un examen est composé de 3 sections de 6 questions chacune. Si un élève doit répondre à 2 questions par section, combien a-t-il de choix différents possibles?

18. De combien de façons 4 personnes peuvent-elles se partager 12 objets différents s’il est entendu que chacune doit en avoir 3?

19. De combien de façons peut-on ranger sur une étagère une biographie et 4 romans choisis parmi 3 biographies et 7 romans si l’on veut que la biographie soit toujours au centre?

20. Dans un groupe de 12 étudiants qui résident dans un chalet, on doit en choisir 3 pour faire la cuisine et 4 autres pour laver la vaisselle. De combien de façons peut-on faire ce choix si 3 des étudiants ne savent pas cuisiner?

21. Combien peut-on former d’équipes de 6 hommes choisis parmi 4 officiers et 6 soldats si dans ces équipes il doit y avoir
    a) un officier?
    b) aucun officier?
    c) au moins un officier?

22. De combien de façons différentes peut-on former un comité d'un homme et d'une femme choisis parmi 12 couples si les membres du comité ne peuvent appartenir au même couple?

23. Parmi 7 hommes et 7 femmes, combien peut-on former de comités de 8 personnes ayant
    a) 4 hommes et 4 femmes?
    b) au plus 2 femmes?

24. Un étudiant doit répondre à 10 questions sur 13 (l'ordre n'a pas d'importance). Combien de possibilités a-t-il
    a) en tout?
    b) s'il doit répondre à la première question ou à la seconde question mais pas les deux ensemble?
    c) s'il doit répondre exactement à 3 des 5 premières questions?
    d) s'il doit répondre aux 2 premières questions?
    e) s'il doit répondre au moins à 3 des 5 premières questions?

25. On évalue à 45, le nombre de poignées de mains échangées à une réunion. Sachant que tous les participants se sont donné la main, trouver le nombre de personnes à cette réunion?

26. La capacité d'un autobus est de 14 passagers. Huit sièges, sont près des fenêtres. De combien de façons 6 passagers peuvent-ils s'asseoir si 3 d’entre eux veulent s’asseoir près des fenêtres et 2 autres refusent de s'asseoir près des fenêtres?

27. De combien de manières peut-on transporter 16 personnes au moyen de 2 voitures si l'une de ces voitures ne peut contenir que 8 passagers et si l’autre ne peut en contenir que 10?
    (On suppose que l'ordre à l’intérieur des voitures n'a pas d'importance.)

28. Combien peut-on former d’équipes contenant au moins 2 personnes si on dispose de 10 personnes?

29. De combien de façons peut-on assigner 8 personnes à 2 tâches s’il faut au moins 3 personnes par tâche?
    (Toutes les personnes sont assignées aux deux tâches.)

30. Combien de mots différents de 2 consonnes et de 2 voyelles peut-on former avec les 9 lettres du mot ÉDUCATION?

31. Un gouvernement fait élire 70 députés parmi lesquels 25 doivent être choisis ministres. Combien y a-t-il de possibilités de conseils de ministres différents
    a) si les ministres sont choisis au hasard?
    b) si 10 députés élus étaient assurés avant le début de l'élection d'être ministres?
    c) si les mêmes 10 députés étaient assurés de ministères bien spécifiques?

32. À partir de 8 couples mariés, on forme un comité de 4 personnes. De combien de façons différentes peut-on le former s'il doit y avoir
    a) 2 couples mariés sur le comité?
    b) des personnes de couples différents sur le comité?

33. On organise un party où il y a 7 garçons et 10 filles. Lors d'une danse, tous les garçons se choisissent une partenaire au hasard. De combien de façons les choix peuvent-ils se faire
    a) si personne ne se connaît?
    b) si Monique et Louise sont certaines de participer à la danse (sans savoir avec quel partenaire)?
    c) si Monique est certaine que Luc l'invitera à danser et Louise est certaine que Pierre l'invitera à danser?

34. Charlie Brown doit former sont club de baseball. À l'avant-champ, il lui reste 4 postes à combler (le premier but, le deuxième but, le troisième but et l'arrêt-court). Il doit choisir parmi les 7 joueurs suivants: LINUS, LUCY, PATTY, VIOLET, SCHERMAN, SCHROEDER et SNOOPY.
    a) De combien de façons différentes peut-il le faire?
    b) De combien de façons différentes peut-il le faire, s'il ne doit jamais faire jouer LINUS et LUCY en même temps?

35. On désire peinturer 5 cercles concentriques et on a 6 couleurs à notre disposition

    ROUGE, BRUN, VERT, JAUNE, NOIR et ORANGE

    a) de combien de façons peut-on peinturer les 5 cercles?
    b) si le BRUN et le VERT doivent être parmi les couleurs choisies?
    c) si le BRUN et le VERT doivent être voisins?
    d) si le BRUN et le VERT doivent être voisins mais le VERT doit peinturer un cercle plus grand que le brun?
    e) si le BRUN et le VERT ne peuvent être voisins?

36. Un chanteur désire préparer son tour de chant. Il estime qu'il a dans son répertoire 15 chansons qu'il peut interpréter dont 6 très anciennes et 4 nouvelles. Si le tour de chant comprend 6 chansons
    a) combien y a-t-il de tours de chant possibles?
    b) combien y a-t-il de tours de chant possibles s’il veut chanter 2 très anciennes et 2 nouvelles?
    c) combien y a-t-il de tours de chant possibles s’il veut chanter 3 très anciennes mais jamais deux consécutivement?

37. Avec les chiffres

    1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9

    on veut former des nombres de 7 chiffres (répétition de chiffres non permise). Combien de nombres différents peut-on former si ces nombres doivent contenir
    a) au moins 3 chiffres impairs, toujours voisins?
    b) 3 chiffres impairs jamais voisins?

38. Trois personnes s’assoient au comptoir d'un restaurant où les 8 sièges sont libres. De combien de façons différentes peuvent-ils prendre place pour que chacune d'elles se retrouve sans voisin immédiat?

39. Combien de mots de 4 lettres peut-on former à partir des lettres du mot CRAYONEX si, lorsqu'on choisit le Y, il faut prendre le bloc YON dans l'ordre?

40. À partir d'un jeu ordinaire de 52 cartes, on compose une main de 5 cartes. Combien existe-t-il de façons différentes de composer
    a) les 5 cartes?
    b) 2 valets et 3 rois?
    c) 5 coeurs?
    d) exactement 3 piques sur les 5 cartes
    e) au moins un as?
    f) des cartes d'une même couleur?
    g) des dénominations différentes?
    h) 4 cartes d’une même dénomination?
    i) un triplet et une paire?
    j) 2 paires?

Réponses aux exercices 1.3.2

1.	a)	56	c)	5040		
	b)	720	d)	210		
2.	a)	35	c)	8		
	b)	35	d)	1		
3.		24n				
4.	a)	20	b)	10		
5.	a)	6	b)	20		
6.		4845				
7.		120				
8.		35				
9.		$\frac{52!}{39!\ 13!}$				
10.		15				
11.		11 880				
12.		210				
13.		60				
14.		720				
15.	a)	303 600	b)	175 560		
16.	a)	30 240	b)	6720		
17.		3375				
18.		369 600				
19.		2520				
20.		10 584				
21.	a)	24	b)	1	c)	209
22.		132				
23.	a)	1225	b)	154		

24.	a)	286	c)	80	e)	276
	b)	110	d)	165		
25.		10				
26.		90 720				
27.		32 318				
28.		1013				
29.		182				
30.		1440				
31.	a)	$\frac{70!}{45!}$	b)	$\frac{60!\ 25!}{45!\ 15!}$	c)	$\frac{60!}{45!}$
32.	a)	28	b)	1120		
33.	a)	604 800	b)	282 240	c)	6720
34.	a)	840	b)	600		
35.	a)	720	c)	192	e)	528
	b)	480	d)	96		
36.	a)	3 603 600	b)	648 000	c)	241 920
37.	a)	23 040	b)	14 400		
38.		120				
39.		850				
40.	a)	2 598 960	e)	886 656	i)	3744
	b)	24	f)	5148	j)	123 552
	c)	1287	g)	1 317 888		
	d)	211 926	h)	624		

1.4 Permutations d’objets non tous distincts

Voyons maintenant comment obtenir le nombre de permutations de n objets lorsque ces objets ne sont pas tous distincts.

exemple 1.4.1

Trouver le nombre de façons différentes de permuter les objets suivants:

a) A, A, B
b) A, A, B, B
c) A, A, B, B, B, C, C, C, C

rép: a) 3 ; b) 6 ; c) 1260

D’une façon générale,

permutations d’objets non tous distincts

Le nombre de permutations différentes de n objets non tous distincts tels que

n_1 objets forment un 1^{er} groupe d’objets identiques,
n_2 objets forment un 2^{e} groupe d’objets identiques,
n_3 objets forment un 3^{e} groupe d’objets identiques,
⋮
n_k objets forment un k^{e} groupe d’objets identiques

est donné par

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ \dots\ n_k!}$$

exemple 1.4.2

Combien peut-on former de mots différents avec toutes les lettres du mot PROPORTION

a) au total?
b) si les mots commencent par P?
c) si les O doivent être ensemble?
d) si les O doivent être séparés?
e) si les voyelles doivent être voisines de même que les consonnes?
f) si le mot commence par une voyelle?

rép: a) 151 200 ; b) 30 240 ; c) 10 080 ; d) 70 560 ; e) 1440 ; f) 60 480

exemple 1.4.3

Dans combien d’anagrammes du mot JUPITER est-ce que les voyelles apparaissent dans l'ordre alphabétique?

rép: 840

exemple 1.4.4

On lance un sou 10 fois. Combien existe-t-il de façons différentes d’obtenir 6 piles?

rép: 210

remarque

Le nombre de permutations de n objets tels que

r objets sont identiques d'un 1er groupe et
$n - r$ objets sont identiques d'un 2e groupe

est donné par

$$\frac{n!}{r!\,(n-r)!} = C_r^n$$

Exercices 1.4

1. Combien existe-t-il de façons différentes de permuter les chiffres

   2, 2, 2, 5, 5.

2. Combien existe-t-il de façons différentes de permuter les lettres du mot SERRURIER?

3. De combien de façons peut-on aligner 6 signes "+" et 9 signes "-"?

4. De combien de façons peut-on distribuer 4 livres d’ASTERIX LE GAULOIS et 6 livres de TINTIN AU CONGO parmi 10 enfants? (chaque enfant doit recevoir un livre)

5. On possède 3 exemplaires de 4 livres différents. De combien de façons peut-on les placer sur une étagère?

6. De combien de façons différentes peut-on distribuer 3 dix sous et 7 cinq sous parmi 10 garçons? (chaque garçon reçoit une seule pièce de monnaie)

7. Combien de nombres supérieurs à 1 000 000 et inférieurs à 5 000 000 peut-on former à partir des chiffres du nombre 2 343 203?

8. À l'aide des chiffres du nombre 2 211 312, combien peut-on former de nombres de 7 chiffres
   a) au total?
   b) supérieurs à 2 000 000?
   c) avec les 2 ensemble?
   d) qui commencent et se terminent par un chiffre impair?

9. À partir des lettres du mot MISSISSIPPI, combien de mots de 11 lettres peut-on former
   a) s'il n'y a pas de restrictions?
   b) si les I doivent être ensemble?
   c) si les I doivent être ensemble et les S séparés?
   d) si les mots doivent commencer par une consonne?

10. Dans combien des permutations des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7 les chiffres pairs demeurent-ils en ordre croissant?

11. Le directeur d'un musée désire placer en ligne 7 peintures dont 3 MONET et 4 PICASSO. Les PICASSO sont datés et le directeur veut qu'ils apparaissent en ordre chronologique. De combien de façons différentes peut-il les placer?

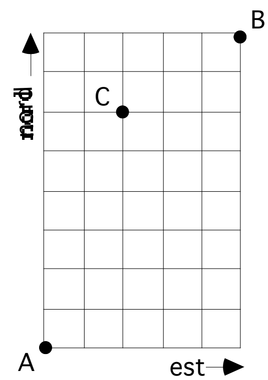
12. À la fin de la première période, le pointage est

CANADA 5 , SUISSE 2

De combien de façons différentes le pointage a-t-il pu aboutir à 5-2?

13. On lance un sou 8 fois. Combien existe-t-il de façons différentes
    a) d'obtenir 5 piles?
    b) de ne pas obtenir 5 piles?

14. Un piéton doit se rendre du point A au point B situé à 8 rues au nord et à 5 avenues à l'est du point A. Le piéton ne doit jamais marcher vers le sud ou vers l'ouest. Un cheminement possible pourrait être EENNENNNEENNN où E et N correspondent respectivement à est et à nord.
    a) Combien de cheminements sont possibles?
    b) Même question si le piéton doit nécessairement passer par C.



Réponses aux exercices 1.4

1.		10		
2.		7560		
3.		5005		
4.		210		
5.		369 600		
6.		120		
7.		360		
8.	a)	140	c)	20
	b)	80	d)	40
9.	a)	34 650	c)	60
	b)	840	d)	22 050
10.		840		
11.		210		
12.		21		
13.	a)	56	b)	200
14.	a)	1287	b)	280

1.5 Le binôme de Newton

Si on affecte le binôme (a+b) d'exposants entiers non négatifs, on obtient les résultats suivants:

$$
\begin{aligned}
(a + b)^0 &= 1 \\
(a + b)^1 &= a + b \\
(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a + b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^3 \\
(a + b)^5 &= \ldots
\end{aligned}
$$

triangle de Pascal Les coefficients des différents binômes forment un triangle que l’on appelle *triangle de Pascal*.

n = 0	1						
n = 1	1	1					
n = 2	1	2	1				
n = 3	1	3	3	1			
n = 4	1	4	6	4	1		
n = 5	1	5	10	10	5	1	
n = 6	1	6	15	20	15	6	1
n = 7	etc.						

Chaque valeur du triangle correspond à une combinaison.

n = 0	C_0^0						
n = 1	C_0^1	C_1^1					
n = 2	C_0^2	C_1^2	C_2^2				
n = 3	C_0^3	C_1^3	C_2^3	C_3^3			
n = 4	C_0^4	C_1^4	C_2^4	C_3^4	C_4^4		
n = 5	C_0^5	C_1^5	C_2^5	C_3^5	C_4^5	C_5^5	
n = 6	C_0^6	C_1^6	C_2^6	C_3^6	C_4^6	C_5^6	C_6^6
n = 7	etc.						

Le tableau peut être développé indéfiniment vers le bas en utilisant la formule suivante.

règle de Pascal

$$C_r^n = C_{r-1}^{n-1} + C_r^{n-1} \qquad 0 < r < n$$

exemple 1.5.1

En utilisant la règle précédente et la ligne correspondant à n = 6 du triangle de Pascal, trouver les valeurs du triangle pour n = 7.

formule du binôme de Newton

Soit a et b deux nombres réels et n un nombre entier non négatif .

$$(a+b)^n = C_0^n\, a^n + C_1^n\, a^{n-1} b + C_2^n\, a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n\, b^n$$

$$= \sum_{r=0}^{n} C_r^n\, a^{n-r} b^r$$

exemple 1.5.2

Développer $(2x+3)^5$ en utilisant le binôme de Newton.

rép: $32x^5 + 240x^4 + 720x^3 + 1080x^2 + 810x + 243$

exemple 1.5.3

Soit le binôme $\left(x - \frac{1}{x}\right)^9$

a) Trouver le 4^e terme du développement de ce binôme.
b) Trouver le terme en x du développement de ce binôme.

rép: a) $-84x^3$; b) $126x$

exemple 1.5.4

Montrer à l'aide de la formule du binôme de Newton que

$$2^n = C_0^n + C_1^n + C_2^n + \dots + C_n^n$$

rép: on pose a = 1 et b = 1 dans la formule du binôme

exemple 1.5.5

Combien de HAMBURGERS différents est-il possible de créer avec les ingrédients suivants:

MOUTARDE, RELISH, OIGNON, TOMATE et CORNICHON

un hamburger peut contenir 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 de ces ingrédients

rép: 32

Exercices 1.5

1. Développer et simplifier en utilisant la formule du binôme de Newton.

   a) $(x + 2)^7$

   b) $(2a^2 - 3)^6$

   c) $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^6$

2. Écrire les 3 premiers termes du binôme $\left(\dfrac{a}{b^2} - \dfrac{b}{a^2}\right)^5$

3. Déterminer le terme indiqué.

   a) $(2a - b)^7$ (le 5e terme)

   b) $\left(\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}\right)^{10}$ (le terme indépendant de a et de b)

4. Si les coefficients du 6e et 16e terme du développement de $(a - b)^n$ sont égaux alors trouver le 3e terme.

5. Écrire sous forme d'un binôme puis évaluer.

   a) $(101)^3$; essayer $(100 + 1)^3$

   b) $(99)^4$

6. Montrer l'identité suivante en utilisant le binôme de Newton .

$$C_0^n - C_1^n + C_2^n - C_3^n + ... \pm C_n^n = 0$$

7. Combien Tony peut-il faire de pizzas différentes s'il dispose des garnitures suivantes: PEPPERONI, CHAMPIGNON, PIMENT, OIGNON, ANCHOIS, CAPICOLLI, BACON et CREVETTE.
   (une pizza peut contenir aucune, une partie ou encore toutes ces garnitures)

8. En tant que patron d'une entreprise de 12 employés, on vous avertit qu'une délégation d'au moins 3 de vos employés viendra vous visiter. Combien existe-t-il de possibilités de délégations différentes pouvant se présenter devant vous?

9. Combien de sous-ensembles possède l'ensemble suivant

$$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$$

(Ne pas oublier que les ensembles A et ∅ sont des sous-ensembles de A.)

10. Trouver la ou les valeurs de n si

a) $C_6^{n-1} + C_5^{n-1} = C_{12}^{n}$

b) $3\left(C_0^n + C_1^n + C_2^n + C_3^n + \ldots + C_n^n\right) = 2^{n-1}\left(C_1^{n-1} + C_2^{n-1}\right)$

11. Démontrer que

$$C_{r-1}^{n-1} + C_r^{n-1} = C_r^n \qquad 0 < r < n$$

(règle de Pascal)

Réponses aux exercices 1.5

1. a) $x^7 + 14x^6 + 84x^5 + 280x^4 + 560x^3 + 672x^2 + 448x + 128$
   b) $64a^{12} - 576a^{10} + 2160a^8 - 4320a^6 + 4860a^4 - 2916a^2 + 729$
   c) $x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 20 + \frac{15}{x^2} + \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}$

2. $\frac{a^5}{b^{10}} - \frac{5a^2}{b^7} + \frac{10}{ab^4}$

3. a) $280a^3b^4$ b) -252

4. $190a^{18}b^2$

5. a) 1 030 301 b) 96 059 601

6.

7. 256

8. 4017

9. 128

10. a) $n = 18$ b) $n = 4$

Exercices de révision

1. Un manufacturier confectionne des chemises de 12 couleurs, chaque couleur en 8 pointures de col et chaque pointure de col en 3 longueurs de manches. Combien de chemises différentes confectionne-t-il?

2. On suggère 5 réponses à chacune des 10 questions d'un examen objectif. Combien y a-t-il de choix de réponses possibles?

3. Dans un magasin, les clients ont le choix de payer à différentes caisses. De combien de façons différentes peuvent se repartir
   a) 5 clients à 3 caisses?
   b) 2 clients à 6 caisses?

4. Sur le trajet d'un train, il y a 10 gares. On imprime un billet différent selon l'endroit où l'on prend le train et selon l'endroit où l'on projette de se rendre. Combien de sortes de billets doit-on faire imprimer si l'on considère aussi bien les voyages dans une direction que dans l'autre?

5. Une mère de 8 enfants désire se faire aider par l'un de ses enfants pour chacune des tâches suivantes: la vaisselle, le lavage et les emplettes au magasin. De combien de façons peut-elle choisir ses enfants si
   a) aucun des enfants ne peut effectuer 2 tâches?
   b) chaque enfant peut effectuer une tâche ou plus?
   c) aucun enfant ne peut effectuer 2 tâches mais Roméo est trop petit pour effectuer les emplettes au magasin?

6. Trouver n si
   a) $C_3^n = 4\,C_2^{n-2}$
   b) $C_{41}^n = C_{94}^n$
   c) $\dfrac{2(n-1)!}{(n-2)!} + \dfrac{(n-1)!}{(n-3)!} = 56$

7. À partir des lettres du mot AUTOMNE, combien peut-on former de mots différents (sans répétition)
   a) de 7 lettres ayant
      - les voyelles voisines?
      - les voyelles voisines et les consonnes voisines?
      - les consonnes jamais voisines?
   b) de 5 lettres ayant
      - la lettre T au milieu?
      - 2 consonnes et 3 voyelles?
      - les voyelles et les consonnes qui alternent?

8. Combien de mots différents peut-on former avec les lettres du mot TARATATA si ces mots
   a) commencent par un A?
   b) commencent par une consonne?
   c) ont les consonnes toujours voisines?
   d) n'ont aucun T voisin?

9. À partir d'un jeu ordinaire de 52 cartes, combien existe t-il de mains différentes de 4 cartes contenant
   a) 4 coeurs?
   b) aucun pique?
   c) un as et un triple?
   d) des dénominations différentes?
   e) des couleurs différentes?

10. On lance un sou 9 fois. Combien existe-t-il de résultats
    a) différents?
    b) contenant 5 piles?
    c) contenant au moins 2 piles?

11. Une ligue de football comprend 6 équipes. Combien de parties doivent se jouer dans une saison si chacune des équipes rencontre l'autre une fois à domicile?

12. Dans le langage informatique, un symbole est représenté à l'aide d'une suite ordonnée constituée de "0" et/ou de "1". Par exemple la lettre A correspond pour certains types d'ordinateurs à la suite ordonnée: 00100001. Combien de symboles différents peut-on former avec une suite constituée de 8 chiffres.
    a) au total?
    b) contenant cinq « 0 » et trois « 1 »?
    c) contenant au moins deux « 1 »?

13. Sept compagnies se font compétition pour l'obtention de 4 contrats. Combien y a-t-il d'attributions possibles si les 4 contrats sont
    a) de 1 000 000 $ en tout point similaire l'un de l’autre et si chaque compagnie ne peut se voir attribuer qu'un seul contrat?
    b) de 1 000 000 $, 2 000 000 $, 400 000 $ et 800 000 $ et si chaque compagnie ne peut se voir attribuer qu’un seul contrat?
    c) de 1 000 000 $, 2 000 000 $, 400 000 $ et 800 000 $ et si chaque compagnie n'est pas restreinte à un seul contrat?

14. L'équipe nationale d'athlétisme comprend 10 coureurs. Combien d'équipes de relais de 4 coureurs peut-on former
    a) sans contrainte?
    b) si l'un des coureurs, Paul Lamarche, s'il est choisi, ne peut prendre que le premier départ?

15. Un contremaître a 4 tâches différentes à faire accomplir. Il dispose de 12 ouvriers dont Thomas Drier et Simon Pinceau. De combien de façons différentes peut-il assigner ces tâches si
    a) Thomas Drier et Simon Pinceau sont 2 des 4 ouvriers assignés?
    b) Thomas Drier et Simon Pinceau sont 2 des 4 ouvriers assignés et Thomas Drier insiste pour effectuer la deuxième tâche?
    c) le contremaître décide de ne choisir qu'un seul de ces 2 ouvriers?
    d) le contremaître ne doit jamais choisir Thomas Drier et Simon Pinceau ensemble pour effectuer ses tâches?

16. À sa mort, un vieux rentier a légué 9 peintures à ses 3 enfants. De combien de façons différentes peut-il repartir les 9 peintures aux 3 enfants si chacun doit avoir 3 peintures?

17. À la librairie du coin, on offre en vente 5 titres différents de chacune des bandes dessinées suivantes: ASTERIX, LUCKY LUKE, ACHILLE TALON et RUBRIQUE-À-BRAC. Vous désirez acheter 3 volumes. De combien de façons différentes pouvez-vous
    a) le faire?
    b) le faire si vous voulez acheter 3 volumes de la même bande dessinée?
    c) acheter 3 volumes de bandes dessinées différentes?

18. De combien de façons peut-on permuter les lettres du mot MARTIN de telle sorte qu'il y ait 2 consonnes entre les 2 voyelles?

19. Combien d'anagrammes du mot SCHTROUMPF contiennent le mot ROU?

20. Une ligue de baseball est formée de 6 équipes. Combien de classements différents peut-on obtenir à la fin de la saison pour les 4 premières places?

21. 10 couples mariés décident de former un comité de 4 personnes. Dans combien de ces comités retrouve-t-on
    a) des personnes de couples différents?
    b) 1 couple marié?
    c) 2 couples mariés?

22. Un dompteur d'animaux donne un spectacle où il décide de dompter l'un après l'autre 5 lions et 4 tigres. De combien de façons peut-il les aligner s'il ne veut pas dompter 2 tigres consécutivement?

23. Un propriétaire de chevaux de course possède 10 chevaux. Il désire en inscrire 4 dans 4 des 10 courses d'un programme de courses (un par course). De combien de façons différentes peut-il le faire?

24. Vous avez sur votre liste de cadeaux de Noël:
    - 5 volumes d'ACHILLE TALON,
    - 5 volumes d'ASTERIX,
    - 5 volumes de LUCKY LUKE,
    - 5 volumes de PHILEMON
    - 6 volumes de TINTIN.

    Vous demandez 3 volumes de bandes dessinées différentes. De combien de façons pouvez-vous recevoir ces 3 volumes?

25. On organise un tournoi à la ronde (chaque joueur rencontre tous les autres joueurs une fois). Au total on a joué 300 parties. Trouver le nombre de participants au tournoi.

26. 9 femmes et 12 hommes fêtent le nouvel an. Sur le coup de minuit, tout le monde s'embrasse sauf les hommes naturellement qui se donnent la main. Combien, s'est donné
    a) de poignées de main?
    b) de « becs »?

27. Soit les 7 cases suivantes $\square\square\square\square\square\square\square$. Combien existe-t-il de façons différentes
    a) de colorer toutes les cases si on dispose des 3 couleurs BLEU, ROUGE et JAUNE?
    b) de colorer 3 cases en VERT et 2 cases en BRUN?
    c) de colorer au moins une des cases en NOIR?
    d) de colorer 3 cases non voisines en NOIR?

28. Les gagnants d'un concours de mathématiques se voient attribuer

    3 copies d'ASTERIX LE GAULOIS,
    2 copies d'ACHILLE TALON PERSISTE ET SIGNE,
    1 copie de LUCKY LUKE ET LE FIL QUI CHANTE.

    De combien de façons peut-on attribuer ces prix si

    a) aucun des 20 participants ne peut recevoir plus d'un livre?
    b) un participant peut se mériter 1, 2 ou 3 livres mais pas deux copies du même titre?

29. Dans le développement de $(x + 2)^{18}$, relever le terme en x^{15}.

$i = \sqrt{-1}$

30. Calculer à l'aide de la formule du binôme la valeur de $(1 - 2i)^5$.

Réponses aux exercices de révision

1.		288				
2.		9 765 625				
3.	a)	243	b)	36		
4.		90				
5	a)	336	b)	512	c)	294
6.	a)	4 ou 9	b)	135	c)	8
7.	a)	576		288		1440
	b)	360		1440		216
8.	a)	140	c)	20		
	b)	140	d)	100		
9.	a)	715	c)	192	e)	28 561
	b)	82 251	d)	183 040		
10.	a)	512	b)	126	c)	502
11.		30				
12.	a)	256	b)	56	c)	247
13.	a)	35	b)	840	c)	2401
14.	a)	5040	b)	3528		
15.	a)	1080	c)	5760		
	b)	270	d)	10 800		
16.		1680				
17.	a)	1140	b)	40	c)	500
18.		144				
19.		40 320				
20.		360				
21.	a)	3360	b)	1440	c)	45
22.		43 200				
23.		1 058 400				

24.		1400		
25.		25		
26.	a)	66	b)	144
27.	a)	2187	c)	127
	b)	210	d)	10
28.	a)	2 325 600	b)	4 332 000
29.		$6528x^{15}$		
30.		$41 + 38i$		